Grzegorz Świderski

Zbieżność wyznaczników Turána dla wielomianów ortogonalnych

Niech $(p_n : n \in \mathbb{N})$ będzie ciągiem wielomianów ortonormalnych względem miary μ na prostej rzeczywistej. Oznacza to, że

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x) p_m(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n = m, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases} \quad . \tag{1}$$

Ciąg ten spełnia zależność rekurencyjną

$$\begin{gathered} p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = \frac{x - b_0}{a_0}, \\ x p_n(x) = a_{n-1} p_{n-1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n+1}(x) \quad (n \geqslant 1) \end{gathered} \tag{2}$$

gdzie $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ są pewnymi ciągami. Na odwrót, twierdzenie Favarda orzeka, że każdy ciąg wielomianów spełniający (2) spełnia (1) dla pewnej miary μ.

W 1979 roku Nevai udowodnił, że przy pewnych warunkach regularności oraz

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

ciąg wyznaczników Turána

$$p_n^2(x) - p_{n-1}(x) p_{n+1}(x)$$

jest blisko związany z gęstością miary μ. W 1985 roku Máté-Nevai-Totik używając podobnych metod udowodnili asymptotykę wielomianów. Celem odczytu jest zaprezentowanie analogicznych wyników w sytuacji, gdy współczynniki a_n oraz b_n są nieograniczone (np. dla wielomianów Hermite). Pozwala to na przybliżanie gęstości μ. Na kilku przykładach przedyskutujemy numeryczną skuteczność tego podejścia.