Egzamin licencjacki/inżynierski

13 września 2022

Informacja dla zdających egzamin na kierunku informatyka

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Matematyka II, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla zdających egzamin na kierunku ISIM

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne, Języki formalne i złożoność obliczeniowa) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla wszystkich zdających

Za brakujące (do trzech) zestawy zostanie wystawiona ocena niedostateczna z urzędu. Egzamin uważa się za zaliczony, jeśli student rozwiąże z oceną dostateczną co najmniej 2 zestawy. Wtedy ocena z egzaminu jest średnią arytmetyczną ocen z trzech wybranych zestawów. Na rozwiązanie przeznacza się czas 3x40+30=150 minut. Po wyjściu z sali egzaminacyjnej w czasie egzaminu nie ma możliwości powrotu do tej sali i kontynuowania pisania egzaminu.

Matematyka I — Logika dla informatyków

Rozważmy relację równoważności $\simeq$ na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zadaną wzorem

$$f \simeq g \overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} \exists k \forall n{>}k\ f(n) = g(n).$$

(a) Udowodnij, że klasa abstrakcji funkcji $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $z(n) = 0$, w relacji $\simeq$, jest przeliczalna.

(b) Udowodnij, że wszystkie klasy abstrakcji relacji $\simeq$ są równoliczne.

(c) Udowodnij, że zbiór klas abstrakcji relacji $\simeq$ nie jest przeliczalny.

Metody Programowania

Poniższe zadania należy rozwiązać używając języka Racket.

Zadanie 1 Zaproponuj reprezentację macierzy liczbowych o m wierszach i n kolumnach:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jeżeli Twoja reprezentacja tego wymaga, to napisz predykat sprawdzający czy jego argument jest poprawną macierzą.

Zadanie 2 Zdefiniuj następnie operację dodawania macierzy, zgodnie ze wzorem:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Zadanie 3 Wreszcie, zdefiniuj operację transpozycji macierzy, zgodnie ze wzorem:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matematyka dyskretna

Ile rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich ma nierówność:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{10} < 50?$$

Matematyka II — Algebra

Zadanie 1. (5 punktów)
Dane są względnie pierwsze całkowite liczby a, b.
a). (2p) Opisać (jeden) krok metody znajdowania $x, y \in \mathbb{Z}$ takich, że zachodzi $ax + by = 1$.
b.) (3p) Niech $a = 34, b = 21$. Znaleźć x, y takie, że $55x + 34y = 1$.

Zadanie 2. (5 punktów)
Znaleźć wszystkie nierozkładalne wielomiany stopnia 3 w pierścieniu $\mathbb{Z}_2[X]$.

Zadanie 2. (4 punkty)
Ile rozwiązań nad ciałem $\mathbb{Z}_7$ ma układ równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Progi punktowe: 4, 6, 8, 10, 12 punktów.

Metody numeryczne

Za rozwiązanie zadań można otrzymać łącznie 12 punktów. Otrzymanie 4 pkt. gwarantuje ocenę dostateczną, próg dla dst+ to 5.5 pkt., dla db – 7 pkt., dla db+ 8.5 pkt., a dla bdb – 10 pkt.

1. $\boxed{\text{2 punkty}}$ **Podaj** (w miarę) bezpieczny numerycznie `algorytm` obliczania zer równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Zastosowaną strategię **uzasadnij** odwołując się do omówionych na wykładzie z AN(L) lub AN(M) **problemów** wynikających z przyjętego modelu arytmetyki zmiennopozycyjnej.

2. $\boxed{\text{4 punkty}}$ **Znajdź postać Newtona** (podanie postaci Lagrange'a nie wchodzi w grę!) wielomianu interpolacyjnego $L_{2022} \in \Pi_{2022}$ dla następujących danych:

x_k	0	1	2	3	...	2021	2022
y_k	-1	-2	-3	-4	...	-2022	π

   Rozwiązanie **uzasadnij**.

3. $\boxed{\text{4 punkty}}$ Pomiary (t_k, c_k) $(0 \leq k \leq N;\ t_k > 0,\ c_k > 1)$ pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem $C(t) = 2^{At^2+2022}$. Stosując aproksymację średniokwadratową, **wyznacz prawdopodobną** wartość parametru A.

Algorytmy i struktury danych

Za rozwiązanie obydwu zadań z tej części można otrzymać w sumie do 9 punktów. Skala ocen: poniżej 3 punktów — ocena niedostateczna (egzamin niezdany), 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, 7 albo więcej punktów daje ocenę bardzo dobrą.

Zadanie 1: minimalna liczba tankowań (4 punkty)

Pewien kierowca ma przejechać z miasta A do miasta B określoną trasą. Bak pełen paliwa w jego samochodzie wystarczy na przejechanie n km. Na jego mapie są zaznaczone odległości pomiędzy wszystkimi stacjami benzynowymi na trasie. Kierowca ma zamiar tankować jak najmniejszą liczbę razy w czasie swojej pordóży.

Opracuj i opisz efektywny algorytm, który pomoże kierowcy ustalić, na których stacjach powinien on tankować paliwo. Zapisz ten algorytm w pseudokodzie i oszacuj jego złożoność obliczeniową. Uzasadnij, że zaproponowana strategia zawsze prowadzi do optymalnego rozwiązania.

Zadanie 2: kopiec z grupą elementów szczytowych (5 punktów)

Zaprojektuj strukturę takiej kolejki priorytetowej, z której będzie można pobierać nie tylko maksymalny ale również drugi co do wielkości, trzeci co do wielkości, i tak dalej aż do c-tego co do wielkości, dla pewnego niewielkiego ustalonego parametru $c \in \mathbb{N}$. Twoje rozwiązanie powinno opierać się na zmodyfikowanym kopcu binarnym a złożoność czasowa operacji *insert(x)* i *extract–max(k)* ($k = 1, 2, \ldots, c$ to parametr określający, o który element co do wielkości chodzi) powinna być logarytmiczna względem aktualnej liczby elementów w strukturze (przyjmujemy, że c jest pewną stałą).

Opisz krótko ideę działania tej struktury a następnie zapisz w pseudokodzie procedury realizujące wstawienie elementu do kolejki oraz pobranie elementu k-tego co do wielkości elementu z kolejki. Uzasadnij, że przedstawiona implementacja operacji kolejkowych będzia działać w czasie logarytmicznym.

Języki formalne i złożoność obliczeniowa

Jaka jest złożoność następującego problemu: m-słabe pokrycie wierzchołkowe
Dane: Graf $G = (V, E)$, liczba $k > 0$
Pytanie: Czy istnieje zbiór $A \subseteq V$ o mocy co najwyżej k taki, że każdy wierzchołek $v \in V$ należy do A lub jest połączony z jakimś wierzchołkiem z A ścieżką o długości co najwyżej m? Odpowiedź uzasadnij.