Egzamin licencjacki/inżynierski

6 lipca 2022

Informacja dla zdających egzamin na kierunku informatyka

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Matematyka II, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla zdających egzamin na kierunku ISIM

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Metody programowania, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne, Języki formalne i złożoność obliczeniowa) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązania trzech zestawów.

Informacja dla wszystkich zdających

Za brakujące (do trzech) zestawy zostanie wystawiona ocena niedostateczna z urzędu. Egzamin uważa się za zaliczony, jeśli student rozwiąże z oceną dostateczną co najmniej 2 zestawy. Wtedy ocena z egzaminu jest średnią arytmetyczną ocen z trzech wybranych zestawów. Na rozwiązanie przeznacza się czas 3x40+30=150 minut. Po wyjściu z sali egzaminacyjnej w czasie egzaminu nie ma możliwości powrotu do tej sali i kontynuowania pisania egzaminu.

Matematyka I — Logika dla informatyków

Dla funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ niech $R_f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie relacją równoważności zdefiniowaną wzorem

$$R_f = \{\langle m, n\rangle \mid f(m) = f(n)\}.$$

Udowodnij, że każda relacja równoważności na zbiorze $\mathbb{N}$ jest postaci R_f dla pewnej funkcji f.

Matematyka II — Algebra

Zadanie 1. (6 punktów)
Dane są względnie pierwsze całkowite liczby a, b.
a.) (2p) Opisać (jeden) krok metody znajdowania $x, y \in \mathbb{Z}$ takich, że zachodzi $ax + by = 1$.
b.) (4p) Niech $a = 55, b = 34$. Znaleźć x, y takie, że $55x + 34y = 1$.

Zadanie 2. (4 punkty)
Wskazać (wraz z uzasadnieniem) nierozkładalny wielomian stopnia 3 w pierścieniu $\mathbb{Z}_2[X]$.

Zadanie 3. (4 punkty)
Ile rozwiązań nad ciałem $\mathbb{Z}_3$ ma układ równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Progi punktowe: 4, 6, 8, 10, 12 punktów.

Metody Programowania

Poniższe zadania należy rozwiązać używając języka Racket.

Zadanie 1 Zaimplementuj jednoargumentową funkcję odwracającą listę na dwa sposoby:

- rev-app – z użyciem funkcji append, której definicję również należy przytoczyć;
- rev-acc – z użyciem własnej funkcji pomocniczej wykorzystującej akumulator.

Która z definicji jest lepsza i dlaczego?

Zadanie 2 Udowodnij, że dla dowolnej listy xs, zachodzi

$$(\textsf{rev-app}\ xs) \equiv (\textsf{rev-acc}\ xs)$$

Matematyka dyskretna

W sześciokącie foremnym o boku 1 znajduje się 7 punktów. Pokaż, że odległość jakichś dwóch z nich od siebie jest niewiększa niż 1. Pokaż, że dla żadnej odległości mniejszej niż 1, teza zadania nie jest prawdziwa.

Metody numeryczne

Za rozwiązanie zadań można otrzymać łącznie 12 punktów. Otrzymanie 4 pkt. gwarantuje ocenę dostateczną, próg dla dst+ to 5.5 pkt., dla db – 7 pkt., dla db+ 8.5 pkt., a dla bdb – 10 pkt.

1. $\boxed{\text{2 punkty}}$ **Udowodnij**, że dodatnia liczba rzeczywista ma skończone rozwinięcie dwójkowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $m/2^n$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Jakie znaczenie ma ta obserwacja w kontekście wprowadzania danych do arytmetyki fl i wykonywania w niej operacji zmiennopozycyjnych? Odpowiedź **dokładnie** uzasadnij, **odwołując się** do omówionego na wykładzie z AN(L) lub AN(M) modelu arytmetyki zmiennopozycyjnej.

2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ **Podaj** definicję naturalnej interpolacyjnej funkcji sklejanej trzeciego stopnia (*w skrócie*: NIFS3) $\boxed{\text{2 punkty}}$ **Znajdź** NIFS3 dla danych

x_k	-2022	-4	-2	0	1	3	2022
y_k	8043	1989	1983	1977	1974	1968	-4089

Uwaga. Do rozwiązania tego zadania nie trzeba znać jawnego wzoru na NIFS3.

3. $\boxed{\text{3 punkty}}$ **Opisz w szczegółach** kwadratury interpolacyjne (m.in. podaj ideę – odpowiedni rysunek mile widziany, wyprowadź wzory na współczynniki, uwzględnij szczególną sytuację, gdy węzły są równoodległe, nie zapomnij o *najlepszych* kwadraturach interpolacyjnych, itp.). $\boxed{\text{1 punkt}}$ **Podaj** definicję rzędu kwadratury liniowej. $\boxed{\text{1 punkt}}$ **Jaki** rząd mogą maksymalnie mieć kwadratury interpolacyjne? Odpowiedź **uzasadnij**.

Algorytmy i struktury danych

Za rozwiązanie obydwu zadań z tej części można otrzymać w sumie do 9 punktów. Skala ocen: poniżej 3 punktów — ocena niedostateczna (egzamin niezdany), 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, 7 albo więcej punktów daje ocenę bardzo dobrą.

Zadanie 1: znajdowanie granicy podziału (4 punkty)

Dana jest n-elementowa tablica zawierająca liczby całkowite $A = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$. Liczby w tej tablicy są ułożone w taki sposób, że najpierw występują liczby ujemne (na pierszych k pozycjach) a potem liczby nieujemne (na ostatnich $n - k$ pozycjach) — oczywiście k nie jest znane.

Opracuj i opisz efektywny algorytm (działający poniżej czasu liniowego), który wyliczy ile jest liczb ujemnych w tablicy A (czyli wyznaczy wartość k). Zapisz ten algorytm w pseudokodzie, uzasadnij jego poprawność i oszacuj złożoność obliczeniową.

Przykład: dla 6-elementowej tablicy z następującymi liczbami $[-3, -1, -2, 5, 0, 4]$ algorytm powinien odpowiedzieć wartością 3.

Zadanie 2: słownik z operacją *between* (5 punktów)

Niech S będzie słownikiem z dodatkową operacją: *between(x, y)*. Chcielibyśmy efektywnie wykonywać następujące operacje na tej strukturze danych:

1. *S = new()* : $S \leftarrow \emptyset$ (utworzenie pustego zbioru);
2. *S.insert(x)* : $S \cup \{x\}$ (dodanie nowego elementu do zbioru);
3. *S.delete(x)* : $S \setminus \{x\}$ (usunięcie elementu ze zbioru);
4. *S.search(x)* : $x \in S$ (sprawdzenie czy element należy do zbioru);
5. *k = S.between(x, y)* : $|\{z \in S : x \leq z \leq y\}|$ (wyznaczenie liczby elementów w S, których wartości mieszczą się w zakresie od x do y włącznie).

Zaprojektuj taką strukturę danych dla S, która umożliwi wykonywanie wymienionych operacji w czasie logarytmicznym $O(\log n)$, gdzie $n = |S|$ (liczba elementów w S). Możesz wykorzystać jakąś znaną strukturę danych, która efektywnie realizuje operacje słownikowe i zaadoptować ją na potrzeby zadania. Zapisz w pseudokodzie procedurę realizującą operację *between(x, y)* i wyjaśnij jak ona działa. Krótko ale precyzyjnie opisz, jak należy zmodyfikować pozostałe standardowe operacje słownikowe. Przeanalizuj złożoność czasową wszystkich operacji na tej strukturze.

Języki formalne i złożoność obliczeniowa

Jaka jest złożoność następującego problemu: m-silne pokrycie wierzchołkowe
Dane: Graf $G = (V, E)$, liczba $k > 0$
Pytanie: Czy istnieje zbiór $A \subseteq V$ o mocy co najwyżej k taki, że każdy wierzchołek $v \in V$ należy do A lub ma co najmniej m sąsiadów w A?
Odpowiedź uzasadnij.